

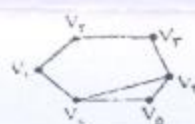
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>n</math> یک عدد طبیعی باشد، آن گاه زوج بودن <math>n</math> و زوج بودن <math>n^2</math> هم ارزند.</p> <p>ب) اگر <math>a b</math> و <math>c d</math> در این صورت <math>a+c b+d</math>.</p> <p>پ) از رابطه ی هم نهستی <math>24 \equiv 15 \pmod{3}</math> می توان رابطه ی <math>8 \equiv 5 \pmod{3}</math> را نتیجه گرفت.</p> <p>ت) گراف <math>2</math>-منتظم از مرتبه ی <math>n</math> با مشخصات <math>n=7</math> و <math>r=3</math> وجود ندارد.</p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با کلمات و عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر <math>a b</math> و <math>b a</math> آن گاه <math>a = \dots\dots\dots</math></p> <p>ب) عدد <math>1367</math> به دسته ی هم نهستی <math>\dots\dots\dots</math> به پیمانته ی <math>7</math> تعلق دارد.</p> <p>پ) اگر <math>G</math> یک گراف <math>a</math> راس دلخواه باشد و <math>N_G\{a\} = \emptyset</math> در این صورت <math>a</math> راس <math>\dots\dots\dots</math> است.</p> <p>ت) گراف کامل <math>K_p</math> دارای <math>28</math> یال است. در این صورت مقدار <math>\delta(G)</math> برابر <math>\dots\dots\dots</math> است.</p>	۲
۲	<p>گزاره الف را به روش مستقیم، گزاره ی ب را به روش برهان خلف اثبات کنید و برای گزاره ی پ مثال نقض ارائه دهید.</p> <p>الف) مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.</p> <p>ب) اگر <math>\alpha</math> و <math>\beta</math> دو عدد گنگ باشند ولی <math>\alpha + \beta</math> گویا باشد ثابت کنید <math>\alpha + 2\beta</math> عددی گنگ است.</p> <p>پ) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از یک عدد <math>2^n - 1</math> اول است.</p>	۳
۱/۲۵	<p>اگر <math>X, Y, Z</math> سه عدد حقیقی باشند با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x+y+z) - 3$	۴

۵	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m+7)$ و $(5m+9)$ بر $a$ بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$ .	۱
۶	اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح $n$ بخش پذیر باشند، آن گاه ثابت کنید باقی مانده ی تقسیم نیز همواره بر $n$ بخش پذیر است.	۰/۷۵
۷	موارد زیر را ثابت کنید. الف) اگر $p$ عددی اول باشد، $a \in \mathbb{Z}$ و $p \mid a$ ثابت کنید $(p, a) = 1$ ب) با توجه به تعریف ک م م ثابت کنید $a \mid b \Rightarrow [a, b] =  b $ پ) ثابت کنید اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \mid m$ آن گاه $a \equiv b \pmod{n}$ .	۲/۷۵
۸	آیا از این که $a \mid bc$ می توان نتیجه گرفت که $a$ حداقل یکی از دو عدد $b$ و $c$ را عاد می کند؟ در صورت منفی بودن جواب مثال نقض بیاورید.	۰/۷۵
۹	الف) باقی مانده ی تقسیم عدد $A = 2^{21} + 17$ را بر عدد ۷ بیابید. ب) اگر دو عدد $(2a-5)$ و $(fa-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a+6)$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۰	اگر در یک سال اول مهرماه روز دوشنبه باشد، ۲۱ اسفند در همان سال چه روزی در هفته است؟	۱
۱۱	به چند طریق می توان ۵۱۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۵۰۰۰ و ۲۰۰۰ تومان تبدیل کرد؟	۱/۵
۱۲	همه ی اعداد صحیح را بیابید که ۴ برابر آن ها منهای ۱۶ بر ۶ بخش پذیر باشد.	۱/۲۵

۲	<p>گراف <math>G</math> با مجموعه ی راس ها و یال های آن به صورت زیر مفروض است:</p> $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \quad E(G) = \{v_1v_2, v_1v_6, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_3v_4\}$ <p>الف) نمودار آن را رسم کنید.</p> <p>ب) مرتبه و اندازه ی گراف را مشخص کنید.</p> <p>پ) مقدار <math>\Delta(G)</math> چقدر است؟</p> <p>ت) یک مسیر به طول ۴ در این گراف بنویسید.</p> <p>ث) یک دور به طول ۵ بنویسید.</p> <p>ج) مجموعه ی همسایگی های راس <math>v_5</math> را بنویسید.</p>	۱۳
۱	<p>۱۱ نفر در یک کلاس حضور دارند. برخی از آن ها با هم دست می دهند. ۱۰ نفر آن ها دقیقا با ۲ نفر دست می دهند. نشان دهید نفر یازدهم نمی تواند دقیقا با ۷ نفر دست داده باشد.</p>	۱۴
۱/۲۵	<p>به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید؟</p> <p>الف) اگر <math>G</math> یک گراف با ۱۰ راس و ۷ یک راس آن باشد مقدار <math>d_G(v) + d_{\bar{G}}(v)</math> چقدر است؟</p> <p>ب) گرافی که بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود دارد چه نام دارد؟</p> <p>پ) <math>G</math> یک گراف ۶ راسی، ۴-منتظم است. تعداد یال های آن چقدر است؟</p> <p>ت) مکمل گراف کامل چه گرافی است؟</p> <p>ث) اگر <math>G</math> یک گراف باشد و <math>\delta(G) \geq 6</math> در این صورت <math>G</math> لزوما دارای یک مسیر به طول چند است؟</p>	۱۵

۱	الف) درست	ب) نادرست	پ) نادرست	ت) درست	۱
۲	الف) $\pm b$	ب) $ 2 _7$	پ) تنها	ت) ۸	۱
۳	الف) هر عدد فرد به صورت $2k+1$ و $k \in \mathbb{Z}$ .				۱
۰/۷۵	$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 2q, q \in \mathbb{Z}$				۰/۲۵
<p>ب) فرض کنید <math>\alpha + 2\beta</math> گنگ نباشد پس عددی گویا است. از طرفی بنا بر فرض <math>\alpha + \beta</math> عددی گویا است. پس <math>(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta</math> عددی گویا است. یعنی <math>\beta</math> عددی گویا است که با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.</p> <p>پ) اگر <math>n=4</math> در این صورت <math>2^4 - 1 = 16 - 1 = 15</math> عددی مرکب است.</p>					۰/۲۵
۱/۲۵	$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x+y+z) - 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2x + 2y + 2z - 1 - 1 - 1$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$				۴
به یک گزاره همیشه درست رسیدیم. همواره برقرار است.					
۱	$\left. \begin{aligned} a 4m+7 &\Rightarrow a 20m+35 \\ a 5m+9 &\Rightarrow a 20m+36 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a (20m+36) - (20m+35) = 1$ $\Rightarrow a 1 \Rightarrow a = \pm 1$				۵
۰/۷۵	<p>بنا بر الگوریتم تقسیم اعداد صحیح و منحصر به فرد <math>2</math> و <math>q</math> یافت می شوند به طوری که داشته باشیم: <math>a = bq + r \Rightarrow a - bq = r</math> (۱)</p>				۶

	$\left. \begin{array}{l} n a \\ n b \Rightarrow n bq \end{array} \right\} \Rightarrow n a - bq \stackrel{(1)}{\Rightarrow} n r$	
۱	$(p,a) = d \Rightarrow \begin{cases} d p \Rightarrow d = \vee d = p \\ d a \quad (1) \end{cases}$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> <p>اگر <math>d = p</math> بنا بر (۱) داریم: <math>p a</math> که با فرض در تناقض است. پس <math>(p,a) = 1 \Rightarrow d = 1</math>.</p> <p>ب) باید دو شرط موجود در تعریف ک م م را برای <math> b </math> بررسی کنیم.</p> <p>شرط اول: <math>a  b , b  b </math> شرط دوم: <math>\forall m &gt; 0, a m, b m \Rightarrow  b  \leq m</math>.</p> $\frac{a b}{b  b } \Rightarrow a  b $ <p>پس شرط اول برقرار است.</p> <p>پس شرط دوم برقرار است. <math>\forall m &gt; 0, a m \wedge b m \Rightarrow b m \Rightarrow  b  \leq  m  \stackrel{m &gt; 0}{\Rightarrow}  b  \leq m</math></p>	۷
۰/۷۵	$a \stackrel{m}{\equiv} b \Rightarrow m a - b \Rightarrow n m \Rightarrow n a - b \Rightarrow a \stackrel{n}{\equiv} b$ <p style="text-align: right;">(پ)</p>	
۰/۷۵	<p>خیر در حالت کلی درست نیست. زیرا: <math>۶ ۹ \times ۴, ۶ ۹, ۶ ۴</math></p>	۸
۱	$2^2 \stackrel{y}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^2)^{1 \cdot y} \equiv (1)^{2 \cdot y} \Rightarrow 2^{2 \cdot y} \equiv 1 \Rightarrow 2 \times 2^{2 \cdot y} \equiv 2$ $\Rightarrow 2^{2 \cdot y} \equiv 2 \Rightarrow 2^{2 \cdot 1} + 17 \equiv 19 \equiv 5$ $fa - 7 \equiv 2a - 5 \Rightarrow fa - 2a \equiv 2 \Rightarrow a \equiv 2$	(الف)
۰/۷۵	$9a + 6 \equiv 9 \times 2 + 6 = 24 \equiv 4$ <p style="text-align: right;">(ب)</p>	

۱	<p>۲۹ روز مهرماه و چهار ماه آبان و آذر و دی و بهمن و ۲۱ روز هم تا ۲۱ اسفند، پس فاصله ی ۱</p> <p>مهر تا ۲۱ اسفند یعنی <math>d = ۲۹ + ۴ \times ۳۰ + ۲۱ = ۱۷۰</math> از طرفی <math>۱۷۰ = ۲y</math> با توجه به جدول زیر روز متناظر با عدد ۲ چهارشنبه در آن سال است. تذکر: در جدول مبدا را روز دوشنبه در نظر می گیریم:</p> <table border="1" data-bbox="253 431 1273 594"> <tr> <td>د</td> <td>س</td> <td>چ</td> <td>پ</td> <td>ج</td> <td>ش</td> <td>ی</td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </table>	د	س	چ	پ	ج	ش	ی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱۰				
د	س	چ	پ	ج	ش	ی														
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶														
۱/۵	<p>اگر <math>x</math> و <math>y</math> را به ترتیب تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی در نظر بگیریم: پس باید جواب های نامنفی معادله سیاله ی <math>۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۵۱۰۰۰</math> را بیابیم.</p> $\begin{aligned} \Rightarrow 2x + 5y &= 51 \Rightarrow 2x \equiv 51, 51 \equiv 1 \Rightarrow 2x \equiv 1 \Rightarrow 2x \equiv 1 + 5 = 6 \Rightarrow x \equiv 3 \\ \Rightarrow x &= 5k + 3, k \in \mathbb{Z}, 2(5k + 3) + 5y = 51 \Rightarrow 10k + 5y = 45 \\ \Rightarrow 2k + y &= 9 \Rightarrow y = -2k + 9 \end{aligned}$ <p>سپس به کمک جدول زیر جواب های آن نامنفی آن را می یابیم.</p> <table border="1" data-bbox="253 1044 1273 1289"> <tr> <td>k</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>۳</td> <td>۸</td> <td>۱۳</td> <td>۱۸</td> <td>۲۳</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>۹</td> <td>۷</td> <td>۵</td> <td>۳</td> <td>۱</td> </tr> </table>	k	۰	۱	۲	۳	۴	x	۳	۸	۱۳	۱۸	۲۳	y	۹	۷	۵	۳	۱	۱۱
k	۰	۱	۲	۳	۴															
x	۳	۸	۱۳	۱۸	۲۳															
y	۹	۷	۵	۳	۱															
۱/۲۵	$\begin{aligned} 4x - 16 &\equiv 0 \Rightarrow 4x \equiv 16 \Rightarrow x \times 2x \equiv x \times 8 \\ 2x &\equiv 8 \Rightarrow 2x \equiv 8 - 2 \times 2 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x \equiv 1 \\ x &= 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$	۱۲																		
۲		۱۳ (الف)																		

	$\Delta(G) = 3$ (پ) $ v(G)  = 6$ , $ E(G)  = 7$ (ب) $N_G(v_5) = \{v_4, v_6\}$ (ج) $v_1 v_6 v_4 v_3 v_2 v_1$ (ث) $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3$ (ت)	
۱	<p>۱۱ نفر را به عنوان ۱۱ راس گراف در نظر می گیریم. وقتی دو نفر با هم دست بدهند بین آن ها یال است. پس ۱۰ راس گراف درجه ۲ خواهد بود. اگر راس یازدهم درجه ۷ باشد یعنی گراف دارای یک راس از درجه فرد است. تناقض است با قضیه ای که بیان می کند تعداد رئوس فرد هر گراف عددی زوج است. پس نفر یازدهم نمی تواند با ۷ نفر دست داده باشد.</p>	۱۴
۱/۲۵	$12$ (پ) $6$ (ت) تهی (ت) $6$ (ث)	۱۵
۲۰	<p>لطفا برای راه حل های درست دیگر بارم را به تناسب تقسیم نمایید. موفق و موید باشید.</p>	